

Вариант 8

Задание 1.

Для определителя $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ найти алгебраическое дополнение элемента a_{24} .

Решение.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется минор этого элемента со знаком, определяемым по правилу:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Таким образом, алгебраическое дополнение элемента a_{24} равно:

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (1-2) - 0 + 4 \cdot (4-1) = 7.$$

Ответ: $A_{24} = 7$.

Задание 2.

Найти матрицы $[AB]$, $[BA]$, $[A^{-1}]$, если $[A] = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $[B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } [AB] &= \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 8 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 8 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 8 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 + (-5) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 5 \cdot 2 + (-5) \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 5 \cdot 5 + (-5) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ 10 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 10 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 10 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 14 & 37 \\ -1 & 0 & 18 \\ 41 & 26 & 57 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } [BA] &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 8 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 10 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-5) + 5 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 \\ 3 \cdot 8 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 10 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 8 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 10 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-5) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 & 2 & 5 \\ 44 & -10 & -3 \\ 28 & 5 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

в) Найдём $[A^{-1}] = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$, где A_{ij} -алгебраические дополнения к элементам a_{ij}

матрицы A .

Вычислим определитель:

$$\det A = \begin{vmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-10 + 3) + 1 \cdot (10 + 10) - 1 \cdot (15 + 50) = -101.$$

Теперь вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = -20, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 26, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 65, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = -34, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -35.$$

$$\text{Таким образом, } [A^{-1}] = -\frac{1}{101} \cdot \begin{bmatrix} -7 & -1 & -4 \\ -20 & 26 & 3 \\ 65 & -34 & -35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{101} & \frac{1}{101} & \frac{4}{101} \\ \frac{20}{101} & -\frac{26}{101} & -\frac{3}{101} \\ -\frac{65}{101} & \frac{34}{101} & \frac{35}{101} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{\text{Ответ:}} \quad [AB] = \begin{bmatrix} 20 & 14 & 37 \\ -1 & 0 & 18 \\ 41 & 26 & 57 \end{bmatrix}, \quad [BA] = \begin{bmatrix} 84 & 2 & 5 \\ 44 & -10 & -3 \\ 28 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad [A^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{7}{101} & \frac{1}{101} & \frac{4}{101} \\ \frac{20}{101} & -\frac{26}{101} & -\frac{3}{101} \\ -\frac{65}{101} & \frac{34}{101} & \frac{35}{101} \end{bmatrix}.$$

Задание 3.

Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее матричным методом

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$$

Решение.

Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера-Капелли. С помощью

элементарных преобразований (алгоритм метода Гаусса), приведём расширенную матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 & | & -8 \\ 3 & 1 & 1 & | & -4 \\ 1 & -4 & -2 & | & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & | & -9 \\ 3 & 1 & 1 & | & -4 \\ -3 & 5 & 6 & | & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & | & -9 \\ 0 & 13 & 7 & | & 23 \\ 0 & -7 & 0 & | & -35 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & | & -9 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 13 & 7 & | & 23 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & | & -9 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 7 & | & -42 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & | & -9 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & -6 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, ранг матрицы равен рангу расширенной матрицы и равен числу неизвестных системы. Значит, исходная система совместна и имеет единственное решение.

Решим систему линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы.

Матрица решений $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ равна $X = A^{-1} \cdot B$, где $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ - матрица системы,

$B = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ -9 \end{bmatrix}$ - матрица свободных членов системы.

Найдём $[A^{-1}] = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$, где A_{ij} - алгебраические дополнения к элементам a_{ij}

матрицы A .

Вычислим определитель:

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-2 + 4) - 5 \cdot (-6 - 1) + 6 \cdot (-12 - 1) = -49.$$

Теперь вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 21,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -18.$$

Таким образом, $[A^{-1}] = -\frac{1}{49} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -14 & -1 \\ 7 & 0 & 21 \\ -13 & -7 & -18 \end{bmatrix}.$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{49} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -14 & -1 \\ 7 & 0 & 21 \\ -13 & -7 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ -9 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{49} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot (-8) + (-14) \cdot (-4) + (-1) \cdot (-9) \\ 7 \cdot (-8) + 0 \cdot (-4) + 21 \cdot (-9) \\ (-13) \cdot (-8) + (-7) \cdot (-4) + (-18) \cdot (-9) \end{bmatrix} = -\frac{1}{49} \cdot \begin{bmatrix} 49 \\ -245 \\ 294 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, $x_3 = -6$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, $x_3 = -6$.

Задание 4.

Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

$$\vec{a} = \{3, 5, 4\}, \vec{b} = \{-2, 7, -5\}, \vec{c} = \{6, -2, 1\}, \vec{d} = \{6, -9, 22\}.$$

Решение.

Для того, чтобы доказать, что три вектора в пространстве образуют базис, достаточно установить, что они некопланарны, т.е. их смешанное произведение не равно нулю. Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 5 & 7 & -2 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (7 - 10) - 5 \cdot (-2 + 30) + 4 \cdot (4 - 42) = -301 \neq 0$$

Итак, определитель не равен нулю, следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно независимы и образуют базис трехмерного пространства.

Так как эти векторы являются базисом, то любой вектор трехмерного пространства можно единственным образом разложить по данному базису. Найдем координаты вектора $\vec{d} = \{-2, 17, 5\}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ из векторного уравнения $\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c} = \vec{d}$.

Этому векторному уравнению соответствует система

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6\alpha_3 = 6 \\ 5\alpha_1 + 7\alpha_2 - 2\alpha_3 = -9 \\ 4\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 = 22 \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера.

По правилу Крамера $\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $\alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $\alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, где:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 5 & 7 & -2 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} - \text{определитель системы, он равен } \Delta = -301.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 6 \\ -9 & 7 & -2 \\ 22 & -5 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 5 & -9 & -2 \\ 4 & 22 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 5 & 7 & -9 \\ 4 & -5 & 22 \end{vmatrix} - \text{вспомогательные определители.}$$

Вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 6 \\ -9 & 7 & -2 \\ 22 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot (7 - 10) + 2 \cdot (-9 + 44) + 6 \cdot (45 - 154) = -602$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 5 & -9 & -2 \\ 4 & 22 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-9 + 44) - 6 \cdot (5 + 8) + 6 \cdot (110 + 36) = 903$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 5 & 7 & -9 \\ 4 & -5 & 22 \end{vmatrix} = 3 \cdot (154 - 45) + 2 \cdot (110 + 36) + 6 \cdot (-25 - 28) = 301$$

$$\text{Следовательно, } \alpha_1 = \frac{-602}{-301} = 2, \alpha_2 = \frac{903}{-301} = -3, \alpha_3 = \frac{301}{-301} = -1.$$

Итак, разложение вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}.$$

Ответ: $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$.

Задание 5.

Вершины пирамиды находятся в точках $A(5, -4, 4)$, $B(-4, -6, 5)$, $C(3, 2, -7)$, $D(6, 2, -9)$. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной из вершины B .

Решение.

1) Объем пирамиды вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}|.$$

$$\overrightarrow{AB} = (-4 - 5, -6 + 4, 5 - 4) = (-9, -2, 1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (3 - 5, 2 + 4, -7 - 4) = (-2, 6, -11),$$

$$\overrightarrow{AD} = (6 - 5, 2 + 4, -9 - 4) = (1, 6, -13).$$

Найдём смешанное произведение:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -9 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -11 \\ 1 & 6 & -13 \end{vmatrix} = -9 \cdot (-78 + 66) + 2 \cdot (26 + 11) + 1 \cdot (-12 - 6) = 164.$$

Тогда объем пирамиды равен:

$$V = \frac{164}{6} = \frac{82}{3} \approx 27,33 \text{ куб. ед.}$$

2) Найдём площадь грани ABD (площадь треугольника ABD) $S_{ABD} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|.$

Найдём векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -9 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -13 \end{vmatrix} = \vec{i}(26 - 6) - \vec{j}(117 - 1) + \vec{k}(-54 + 2) = 20\vec{i} - 116\vec{j} - 52\vec{k}.$$

Модуль векторного произведения равен:

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{20^2 + (-116)^2 + (-52)^2} = \sqrt{16560} = 12\sqrt{15}.$$

Площадь грани ABD равна:

$$S_{ABD} = \frac{12\sqrt{15}}{2} = 6\sqrt{115} \text{ (кв. ед.)}.$$

3) Найдём длину высоты, опущенной на грань ABD , по формуле:

$$h = \frac{3V}{S_{ABD}},$$

$$h = \frac{3 \cdot \frac{82}{3}}{6\sqrt{115}} = \frac{41\sqrt{115}}{345} \approx 1,27 \text{ ед.}$$

Ответ: $V = 27,33$ куб. ед., $h = 1,27$ ед.

Задание 6.

Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 , если

$$M_1(-1, 2, 4), M_2(-1, -2, -4), M_3(3, 0, -1), M_0(-2, 3, 5).$$

Решение.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$$M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3):$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

В нашем случае это точки $M_1(-1, 2, 4)$, $M_2(-1, -2, -4)$, $M_3(3, 0, -1)$, и, следовательно, уравнение $M_1M_2M_3$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-4 \\ -1+1 & -2-2 & -4-4 \\ 3+1 & 0-2 & -1-4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-4 \\ 0 & -4 & -8 \\ 4 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x+1)(20-16) - (y-2) \cdot (0+32) + (z-4) \cdot (0+16) = 0,$$

$$4(x+1) - 32(y-2) + 16(z-4) = 0,$$

$$4x - 32y + 16z + 4 = 0,$$

$$x - 8y + 4z + 1 = 0.$$

Расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Тогда расстояние от точки $M_0(-2, 3, 5)$ до плоскости $x - 8y + 4z + 1 = 0$ равно:

$$d = \frac{|-2 - 8 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-8)^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{81}} = \frac{5}{9} \approx 0,56.$$

Ответ: $d = \frac{5}{9} \approx 0,56$.

Задание 7.

Написать канонические уравнения прямой $\begin{cases} 3x + 3y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + z + 6 = 0 \end{cases}$

Решение.

Каноническое уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{l} = (m, n, p)$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

Поэтому нам надо найти направляющий вектор прямой и какую-нибудь точку, принадлежащую данной прямой.

В качестве направляющего вектора прямой выберем вектор, являющийся векторным произведением нормальных векторов данных плоскостей.

Нормальный вектор первой плоскости равен:

$$\vec{n}_1 = (3, 3, -2),$$

второй плоскости:

$$\vec{n}_2 = (2, -3, 1).$$

Векторное произведение:

$$\vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(3-6) - \vec{j}(3+4) + \vec{k}(-9-6) = -3\vec{i} - 7\vec{j} - 15\vec{k},$$

т.е. направляющий вектор прямой равен $\vec{l} = \{-3, -7, -15\}$.

Осталось найти какую-либо точку, принадлежащую прямой.

Пусть $z = 0$, тогда:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases}$$

Сложим уравнения:

$$5x = -5$$

$$x = -1$$

$$3x + 3y = \frac{1}{3} - x = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

Отсюда $\left(-1, \frac{4}{3}, 0\right)$ - точка, принадлежащая прямой.

Тогда каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y-\frac{4}{3}}{-7} = \frac{z}{-15}.$$

Ответ: $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-\frac{4}{3}}{-7} = \frac{z}{-15}.$

Задание 8.

Найти точку пересечения прямой, заданной каноническими уравнениями, и плоскости

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}, \quad x+2y-z-2=0.$$

Решение.

Перейдем к параметрическим уравнениям прямой:

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2} = t$$

$$\begin{cases} x = -t - 2 \\ y = t + 1 \\ z = 2t - 3 \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости параметрические уравнения прямой:

$$(-t-2) + 2(t+1) - (2t-3) - 2 = 0$$

$$t = 1$$

Подставим полученное значение параметра в параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = -1 - 2 = -3 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \end{cases}$$

Получили координаты точки пересечения:

$$M(-3, 2, -1).$$

Ответ: $M(-3, 2, -1)$.

Задание 9.

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}$.

Решение.

При непосредственной подстановке значения $x = -1$ возникает неопределенность $\frac{0}{0}$. Это

означает, что и в числителе, и в знаменателе дроби есть одинаковые множители $(x+1)$.

Разложив числитель и знаменатель дроби на множители и сократив на множитель $(x+1)$, можем избавиться от неопределенности.

$$a) \quad x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 5 = 36$$

$$x = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 5$$

$$x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$$

$$б) \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-5)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-5}{x-3} = \frac{-1-5}{-1-3} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Задание 10.

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2}$.

Решение.

Имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на x в старшей степени, т.е.

на x^4 , и воспользуемся свойствами пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^4}} = \frac{-3 + 0 + 0}{1 + 0 - 0} = -3.$$

Ответ: -3.

Задание 11.

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}$.

Решение.

При непосредственной подстановке значения $x = 4$ возникает неопределенность $\frac{0}{0}$.

Умножим и разделим числитель и знаменатель на сопряженное к знаменателю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x^2 - 9x + 4)(\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3})}{(\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3})(\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x^2 - 9x + 4)(\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3})}{5 - x - x + 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-1)(x-4)(\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3})}{8-2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-1)(x-4)(\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3})}{x-4} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 4} (2x-1)(\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}) = -\frac{1}{2} (2 \cdot 4 - 1)(\sqrt{5-4} + \sqrt{4-3}) = -\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2 = -7. \end{aligned}$$

Ответ: -7.

Задание 12.

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$.

Решение.

Перейдем к эквивалентным бесконечно малым функциям:

При $x \rightarrow 0$ $\ln(1+3x) \sim 3x$ (так как $3x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$)

При $x \rightarrow 0$ $\sin 2x \sim 2x$ (так как $2x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Задание 13.

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1} \right)^{x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^{x-4} =$$

Воспользуемся следствием ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{x-1-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{-3} = e^4 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (1+0)^{-3} = e^4 \cdot 1 = e^4.$$

Ответ: e^4 .

Задание 14.

Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой x_0

$$y = 8\sqrt[4]{x} - 70, \quad x_0 = 16$$

Решение.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) имеет вид:

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$$

Найдем значение функции в точке с абсциссой $x_0 = 16$:

$$y_0 = y(16) = 8\sqrt[4]{16} - 70 = -54$$

Вычислим производную функции $y = 8x^{1/4} - 70$:

$$y' = 8 \cdot \frac{1}{4} x^{-3/4} = 2x^{-3/4}$$

Найдем значение производной в точке с абсциссой $x_0 = 16$:

$$y'(x_0) = 2 \cdot 16^{-3/4} = \frac{1}{4}$$

Тогда уравнение касательной примет вид:

$$y = -54 + \frac{1}{4}(x - 16)$$

$$y = \frac{1}{4}x - 58.$$

Ответ: $y = \frac{1}{4}x - 58$.

Задание 15.

Найти дифференциал функции в точке с абсциссой x_0

$$y = \arccos \frac{x^2 - 1}{x^2 \sqrt{2}}, \quad x_0 = 1$$

Решение.

Для функции $y = f(x)$ дифференциал имеет вид: $df(x) = y'dx$.

Вычислим производную:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 \sqrt{2}}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 \sqrt{2}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 \sqrt{2}}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right)' = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 \sqrt{2}}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{x^3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{x^3 \sqrt{1 - \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 \sqrt{2}}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Найдем значение производной в точке с абсциссой $x_0 = 1$:

$$y'(1) = -\frac{\sqrt{2}}{1^3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1^2 - 1}{1^2 \cdot \sqrt{2}}\right)^2}} = -\sqrt{2}$$

Тогда дифференциал функции в точке с абсциссой $x_0 = 1$ равен:

$$df(1) = -\sqrt{2}dx.$$

Ответ: $df(1) = -\sqrt{2}dx$.